数理解析研究所講究録
429巻 1981年 1-8

Johnson scheme と t-design の基本関係式について

鹿児島大 理　厚見寅司

1、 Introduction

$(\Omega, \mathbb{B})$ $t-(v, k, \lambda)$ design とする $[t/2] = s$

$\Omega = \{\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_v\}$ $\mathbb{B} = \{B_1, \cdots\cdots, B_{\lambda_0}\}$

Ω の h点 subsets の全体 $\Omega^{(h)} = \{\Omega_{h_1}, \cdots\cdots, \Omega_{h\binom{v}{h}}\}$

$\binom{v}{h} \times \lambda_0$ 行列 M_h

$$M_h(i, j) = \begin{cases} 1 & \Omega_{h_i} \subseteq B_j \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

λ_0 次横ベクトル $\mathbb{a}_i = (r_{i_1}, \cdots\cdots r_{i_{\lambda_0}})$

$$r_{i_j} = \begin{cases} 1 & \alpha_i \in B_j \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

吉沢により次の結果が示されている。(see Yoshizawa[4])

$\mathbb{a}_i - \mathbb{a}_j$ $(1 \leqq i, j \leqq v)$ で張られる空間は $M_\ell^T M_\ell$

$(0 \leqq \ell \leqq t-1)$ の固有空間である。

上のことを一般化するために "n次" $(n \leqq s)$ のベクトル空間を Cameron [1] に従って定義する。

次の結果はよく知られている(cf. Cameron [1], Peterson [3])

＊この"n次"($n \leqq s$)のベクトル空間は $M_l^T M_l$ ($0 \leqq l \leqq s$)の固有空間である。

ここでは実は次のことまでいえることを示す。

定理1 ＊は $M_l^T M_l$ ($0 \leqq l \leqq t-n$)で成立する。

Notations

C_{ij}^n 　 $\binom{v}{i} \times \binom{v}{j}$ 行列

$$C_{ij}^n(a, b) = \begin{cases} 1 & |\Omega_{ia} \cap \Omega_{jb}| = n \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

B_{ij} 　 $\binom{v}{i} \times \binom{v}{j}$ 行列

$$B_{ij}(a, b) = \begin{cases} 1 & \Omega_{ia} \subseteq \Omega_{jb} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

M_m^i 　 $\binom{v}{m} \times \lambda_0$ 行列

$$M_m^i(a, b) = \begin{cases} 1 & |\Omega_{ma} \cap B_b| = i \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

注意 $M_i = M_i^i$

2 Association scheme

定義 Ω上の class number s の association scheme は $\Omega^{(2)}$ の(P)なる性質をもつ s class $C_1, \cdots, C_s$ への

partitionである。

(P) (i) $\forall p \in \Omega$に対して$\{p, q\} \in C_k$となる$q \in \Omega$の数はkにだけ従属する。

(ii) $\forall \{p, q\} \in C_k$に対して$\{p, r\} \in C_i$, $\{r, q\} \in C_j$なる$r \in \Omega$の数は(i, j, k)にだけ従属する。

A_i : $n \times n$行列

$$A_i(p, q) = \begin{cases} 1 & \{p, q\} \in C_i \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

(1) $I, A_1, \cdots\cdots, A_s$で張られる実数体上のベクトル空間はalgebraになる。しかも可換である。

(centralizer algebra of the association scheme)

$V = R\Omega$ (Ωの元でラベルがついたbasisをもつ実数体上のベクトル空間)、Vにおのずから自然にcentralizer algebraが作用して加群になる。(1)より

(2) ⋯⋯ $V = V_0 \oplus \cdots\cdots \oplus V_s$と分解される。各$V_i$は$\langle I, A_1 \cdots, A_s \rangle_R$のすべてのmatrixの固有空間である。

Johnson schemeについて

$\Omega^{(j)} = \{\Omega_{j_1}, \cdots\cdots, \Omega_{j\binom{n}{j}}\}$ class $C_i = \{\{\Omega_{j_\ell}, \Omega_{j_k}\} \mid |\Omega_{j_\ell} \cap \Omega_{j_k}| = i\}$

$0 \leq i \leq j-1$

は$\Omega^{(j)}$上のassociation schemeになる　C_iに対応するbasis matrixはC^i_{jj}とする。

上のassociation schemeのcentralizer algebraをR_jとする。

R_j は $W_j = R\Omega^{(j)}$ を表現加群としてもつ。

注意：知られている結果（Cameron [1]）

$B_{ij}B_{jh} = \binom{h-i}{j-i} B_{ih}$ $\quad B_{ij}M_j = \binom{k-i}{j-i} M_i$ $\quad B_{ij}B_{ij}^T \in R_i$

$B_{ij}^T B_{ij} \in R_j$ $\quad B_{ij}$ の rank $= \binom{v}{i}$ ただし $i<j\le \frac{1}{2}(v+1)$

よって $B_{ij}B_{ij}^T$: non-singular

R_i に対して(2)にあたる分解を

$$W_i = W_{i0} \oplus \cdots\cdots \oplus W_{ii}$$

とする。W_{ij} は R_i のすべての元（行列）の固有空間である。すると W_{i+1} は次の分解をもつ

$$W_{i+1} = W_{i+1,0} \oplus \cdots\cdots \oplus W_{i+1,i+1}$$

$$W_{i+1,j} = W_{ij}B_{i\,i+1} \quad 0\le j\le i \quad W_{i+1,i+1} = \{w\in W_{i+1} \mid wB_{i\,i+1}^T = 0\}$$

各 $W_{i+1,j}$ $0\le j\le i+1$ は R_{i+1} のすべての元の固有空間すなわち(2)の分解になっている。ゆえに $W_{mm}B_{mh} = W_{hm}$ $0\le m<h$

3 定理の証明

$(\Omega, \mathbb{B})$: $2s$ 又は $2s+1$ design より

$M_\ell^T M_\ell \in R_\ell$ $\quad 0\le \ell\le s$ $\quad (\because M_\ell^T M_\ell = \lambda_\ell I + \lambda_{\ell+1} C_{\ell\ell}^{\ell-1} + \cdots + \lambda_{2\ell} C_{\ell\ell}^{0})$

したがって $W_{\ell h}$: $M_\ell M_\ell^T$ の固有空間 よって $W_{\ell h}M_\ell$: $M_\ell^T M_\ell$ の固有空間 $\quad W_{hh}M_h = W_{hh}B_{hs}M_s = W_{sh}M_s = W_{\ell h}M_\ell$ より

$V_h = W_{hh}M_h$ $(0\le h\le s)$ は $M_\ell^T M_\ell$ $(0\le \ell\le s)$ の固有空間である (cf. Cameron [1]).

実はこの $V_h = W_{hh}M_h$（我々は introduction で "h次" ベクトル空間

と呼んだもの）は $M_\ell^T M_\ell$ $(0 \leqq \ell \leqq k-h)$ の固有空間である。

$w_h M_h M_\ell^T M_\ell$ の計算　ただし $w_h \in W_{h,h}$

$$M_h M_\ell^T = \sum_{j=0}^{h} \lambda_{h+\ell-j}\, C^j_{h\ell}$$

$h \leqq \ell$ としてよい（∵ $h > \ell$ のとき V_h 上 $M_\ell^T M_\ell$ は固有値 0 をもつ）

Peterson [3] より $w_h C^j_{h\ell} = (-1)^{h-j}\binom{h}{j} w_h B_{h\ell}$　　$w_h \in W_{h,h}$

これを使用すると

$$w_h M_h (M_\ell M_\ell^T) = \sum_{j=0}^{h} \lambda_{h+\ell-j} (-1)^{h-j} \binom{h}{j}\binom{k-h}{\ell-h} w_h M_h$$

証明終り

以下は Peterson の結果を使用しない別証明である。

$$C^j_{h\ell} M_\ell = \sum_{p=j}^{h} \binom{p}{j}\binom{k-p}{\ell-j} M_h^p$$

$w_h \in W_{h,h}$　　$w_h = (\gamma_{\{\alpha_1, \cdots \alpha_h\}}, \cdots\cdots)$ とする

$$w_h M_h^p = (-1)^{h-p}\binom{h}{p} w_h M_h$$ が成立する。

これの証明には次の事を使用する

$$W_{h,h} = \{ w \in W_h \mid w B^T_{h-1\,h} = 0 \}$$　i.e. $\forall \{\alpha_1, \cdots, \alpha_{h-1}\} \in \Omega^{(h-1)}$

fix すると $\displaystyle\sum_{\alpha_h \in \Omega - \{\alpha_1 \cdots \alpha_{h-1}\}} \gamma_{\{\alpha_1 \cdots \alpha_{h-1}, \alpha_h\}} = 0$

$w_h M_h M_\ell^T M_\ell$ を計算すると

$$w_h M_h M_\ell^T M_\ell = \sum_{j=0}^{h} \lambda_{h+\ell-j} \sum_{p=j}^{h} \binom{p}{j}\binom{k-p}{\ell-j} (-1)^{h-p}\binom{h}{p} w_h M_h .$$

2つの証明は同じであること　すなわち次の式が成立する。

$$\sum_{p=j}^{h} \binom{p}{j}\binom{k-p}{\ell-j} (-1)^{h-p}\binom{h}{p} = (-1)^{h-j}\binom{h}{j}\binom{k-h}{\ell-h}$$

$$\binom{p}{j}\binom{h}{p} = \binom{h}{j}\binom{h-j}{p-j}, \quad \binom{n-p}{m-p} = \sum_{k=0} (-1)^k \binom{n-k}{m}\binom{p}{k}.$$

に注意すればよい。

4 定理の Steiner systems への適用

$(\Omega\ \mathbb{B})$ $t-(v, k, 1)$ design とする。(i.e. Steiner system $S(t, k, v)$). A_h : $\lambda_0 \times \lambda_0$ 行列 $A_h(i,j) = \begin{cases} 1 & |B_i \cap B_j| = h \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$

$$(2)\quad \begin{cases} M_{t-1}^T M_{t-1} = A_{t-1} + \binom{k}{t-1} I \\ M_{t-2}^T M_{t-2} = (t-1) A_{t-1} + A_{t-2} + \binom{k}{t-2} I \\ \cdots\cdots\cdots \\ M_\ell^T M_\ell = \sum_{h=0}^{t-1} \binom{h}{\ell} A_h + \binom{k}{\ell} I \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

スタイナーシステムの基本関係式

定理2 スタイナーシステム $(\Omega, \mathbb{B})$ において次の仮定を満足するとする。Ass. $\forall B \in \mathbb{B}$ $\Omega - B \ni \forall \alpha_1, \alpha_2$

$|\{B' \in \mathbb{B} \mid B' \ni \alpha_1, \alpha_2 \quad |B' \cap B| = t-1\}| = c$ (一定)

このとき $W_{2,2} M_2$ は $A_{t-1}, \cdots\cdots, A_0, I$ の固有空間である。

証明 (2) より

$$M_2 A_{t-1} = (\lambda_{t-1} - 1)\binom{k-2}{t-3} M_2^2 + \binom{k-1}{t-2} M_2^1 + c\, M_2^0$$

$$\omega_2 M_2^i = (-1)^{2-i}\binom{2}{i}\, \omega_2 M_2 \qquad \omega_2 \in W_{22}$$

$W_{2,2} M_2$ は A_{t-1} の固有空間である。

また定理1より $W_{2,2} M_2$ は $M_\ell^T M_\ell$ $0 \leqq \ell \leqq t-2$ の固有空間である。

注意1. この定理の証明は別証明の方法でなければならないと思う。

注意2. 上の定理2のAss.を満足するSteiner systemについて

例1. 次の問題のスタイナーシステムは定理2のAss.を満たす。Cameron[2]の問題 Steiner system $S(t,k,v)$ が次の条件を満たすとき，"$\forall B\in\mathbb{B}$ を取ると

$\mathbb{B}'=\{B'-B'\cap B \mid |B'\cap B|=t-1,\ B'\in\mathbb{B}\}$ $(\Omega-B,\ \mathbb{B}')$ が

Steiner system $S(t-1,\ k-t+1,\ v-k)$ を作る" このとき $S(t,k,v)$ はどのようなスタイナーシステムか？

例2. スタイナーシステム $S(t,k,v)$ におけるCameron[2]の不等式 $v\geq(t+1)(k-t+1)$ で等号をattainするSteiner systemは定理2のAss.を満足する。

次の結果を使用すれば

$\forall B\in\mathbb{B}$ 取って $\forall\alpha_1,\dots,\alpha_t\in B$ とすると $\Omega-B\ni\forall\alpha_{t+1},\alpha_{t+2}$ に対して

$\exists_1 B'\ni\alpha_{t+1},\alpha_{t+2}$ かつ $|B'\cap B|=t-1$ (実は B' は $\alpha_1,\dots\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots\alpha_t$ を含み，$\exists\alpha_i$ は含まない)

となる。

注意3. $S(t,k,v)$ のパラメーターが $v=(t+1)(k-t+1)$ を満たすならば上の結果を使用すると次のdesignを作ることができる。

$$2\text{-}\left(v-k,\ k-t+1,\ \frac{1}{(k-t+1)}\binom{k}{t}\right).$$

References

1. P. J. Cameron : Near-Regularity Conditions for Designs, Geometriae Dedicata, 2 (1973), 213 - 223.

2.______________ : Parallelisms of Complete Designs, London Math. Soc. Lecture Notes 23. Cambridge Univ. Pr., Cambridge, 1976.

3. C. Peterson : On Tight 6-Designs, Osaka J. Math. 14 (1977), 417 - 435.

4. M. Yoshizawa : Block Intersection Numbers of Steiner systems 1, (in Japanese) 1980.